Instituto de Física - UFF
Mecânica Analítica - 2^{o}P/2012 - Prof. Daniel Jonathan
Lista de Exercícios 2 - teste na terça, 18/12

1. Considere um foguete de estágio único, de massa total inicial m_0, da qual uma certa parte m_c é de combustível. O foguete é lançado verticalmente, e seu motor fornece uma força de impulso estática $T = -v_e \dot{m}$ (ignorando diferenciais de pressão).

   a) Levando-se em conta o efeito da gravidade, suposta constante (F = mg), e desprezando outras forças (arrasto, etc), mostre que a velocidade e a posição vertical do foguete, como função do parâmetro $m(t)/m_0 \equiv \mu$, podem ser escritos respectivamente como

   $$v = v_e \left(\ln \frac{1}{\mu} - \frac{1-\mu}{n} \right) \quad , \quad z = \frac{c^2}{gn} \left(1 - \mu \ln \frac{1}{\mu} - \mu - \frac{(1-\mu)^2}{2n} \right)$$

   onde $n \equiv -c\dot{m}/gm_0$ é o valor da aceleração do foguete em unidades de g.

   b) Considere o momento em que todo o combustível já foi queimado, a partir do qual portanto o foguete tem energia total (cinética + potencial) constante. Escreva o valor dessa energia, e observe que quanto maior for n (ou seja, quanto mais rapidamente o foguete é acelerado), maior é a energia disponível ao final da queima. Obtenha o valor-limite correspondendo a um n infinito.

2. Uma "transformação de calibre" dos potenciais escalar (ϕ) e vetor ($\mathbf{A}$) do eletromagnetismo é definida por

   $$\mathbf{A} \to \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda \quad , \quad \phi \to \phi' = \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \Lambda}{\partial t},$$

   onde $\Lambda(\mathbf{r}, t)$ é uma função diferenciável arbitrária.

   a) O que ocorre com os campos elétrico $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ e magnético $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ sob essa transformação?

   b) De que maneira a Lagrangeana de uma partícula se movendo sobre a ação destes potenciais é afetada por essa transformação? As equações de movimento são ou não alteradas?

3. Mostre que a Lagrangeana

   $$\bar{L} = \frac{1}{12}\dot{x}^4 + \frac{\omega^2 x^2}{2}\dot{x}^2 - \frac{\omega^4 x^4}{4}$$

   gera uma equação de movimento equivalente à de um oscilador harmônico de massa $m = 1$, isto é, uma equação que possui as mesmas soluções que a equação de movimento do oscilador, porque pode ser escrita na forma $g(x, \dot{x}) \left(\ddot{x} + \omega^2 x \right) = 0$. Prove, no entanto, que $\bar{L}$ não difere meramente por uma derivada total da Lagrangeana usual $L = \dot{x}^2/2 - \omega^2 x^2/2$.

4. Para um oscilador harmônico de massa m e freqüência angular ω, seja $x_f(t)$ uma solução da eq. de movimento entre $t_0 = 0$ e t_1, e $x(t) = x_f(t) + \eta(t)$, com $\eta(0) = \eta(t_1) = 0$, uma outra trajetória próxima com mesmo ponto inicial e final. Vamos verificar explicitamente que a ação é extremalizada pela trajetória física $x_f(t)$, como prevê o princípio de Hamilton.

   a) Mostre que $S[x] = S[x_f] - \frac{m}{2}\int_0^{t_1} \left(\eta\ddot{\eta} + \omega^2 \eta^2 \right) dt$.

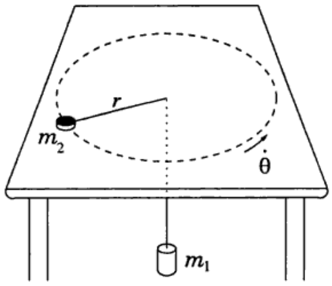
   b) Expandindo η na série de Fourier $\eta(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \,\mathrm{sen}(n\pi t/t_1)$ (por que isso é possível?), mostre que $S[x] = S[x_f] + \frac{m t_1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 \left(\frac{n^2\pi^2}{t_1^2} - \omega^2 \right)$ e conclua que ação é mínima para a trajetória física se $t_1 \leq T/2 = \pi/\omega$.

5. O sistema representado na figura é tal que a massa m_2 se move sem atrito sobre a mesa horizontal e a massa m_1 só pode movimentar-se verticalmente. O fio que une as massas é inextensível. Usando o método dos multiplicadores de Lagrange:

   a) Escreva o(s) vínculo(s) e as equações de movimento do sistema,

   b) Identifique o significado físico do(s) multiplicador(es) de Lagrange, e mostre que a tensão no fio é dada por

   $$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \left[g + \frac{p_\theta^2}{m_2^2 r^3} \right],$$



onde p_θ é o valor constante de $m_2 r^2 \dot{\theta}$.

c) Cheque seu resultado verificando a aceleração de queda da massa m_1 no caso particular em que $p_\theta = 0$,.

6. Considere novamente o problema do disco vertical rolando sem deslizar sobre um plano (exemplo 1.2.6 do livro).

   a) Escreva a Lagrangeana do sistema (atenção com os momentos de inércia!)

   b) Esse sistema possui vínculos não-holônomos, mas lineares nas velocidades generalizadas (eq. 1.2.10). Use a técnica de multiplicadores de Lagrange para escrever as suas equações de movimento.

   c) Resolva essas equações e descreva em palavras como é o movimento resultante.

   Dicas: 1) Pode não parecer a princípio, mas $\phi(t)$ tem uma expressão muito simples! 2) Tente reduzir o problema ao do "patinete", (exemplo 2.4.2).

7. Uma partícula move-se no potencial gravitacional produzido pelas seguintes distribuições de massa homogêneas: (i) esfera de raio R; (ii) paralelepípedo infinitamente longo com seção transversal quadrada; (iii) haste de comprimento l; (iv) disco de raio R; (v) cilindro infinitamente longo com seção transversal circular; (vi) plano infinito; (vii) plano semi-infinito; (viii) fio enrolado na forma de uma hélice infinita de raio R e passo p. Explique, justificando, quais são as componentes de $\mathbf{P}$ e $\mathbf{L}$ (ou combinações delas) que se conservam em cada caso. Não se esqueça de explicar a razão de existir uma conexão entre as simetrias dos objetos com a conservação dessas componentes.

8. Uma partícula de massa m e carga elétrica e move-se num campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{k}}$, cujo potencial vetor é $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\mathbf{B} \times \mathbf{r}$ (o potencial escalar é nulo). (i) Mostre que as equações de Lagrange para a partícula equivalem a $\dot{\mathbf{v}} = -\omega \times \mathbf{v}$ e determine o vetor velocidade angular ω em termos de $\mathbf{B}$. (ii) Exprima a Lagrangeana em coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) e mostre que, embora ϕ seja coordenada cíclica, a componente $L_z = m\rho^2\dot{\phi}$ do momento angular *não* é conservada. Explique.

9. Seja q_k uma coordenada cíclica da Lagrangeana $L(q, \dot{q}, t)$. Se L for substituída por $\bar{L} = L + \frac{d}{dt}F(q,t)$, em geral q_k *não* será coordenada cíclica de $\bar{L}$ e o seu momento conjugado *não* mais se conservará. Mas sabemos que L e $\bar{L}$ produzem as mesmas equações de movimento! Resolva esse paradoxo aparente. Escolhendo $F = q^2$, discuta o caso da partícula livre em uma dimensão, com $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2$.

10. Uma partícula de massa unitária move-se ao longo de uma linha reta sujeita à força não- conservativa $F = -\gamma\dot{x}^2$, com γ uma constante. (i) Mostre que a equação de movimento da partícula pode ser obtida da lagrangiana $L = e^{2\gamma x}\dot{x}^2/2$. (ii) Mostre que a conservação da integral de Jacobi h associada a esta lagrangiana pode ser expressa na forma $\dot{x}e^{\gamma x} = C_1$, onde C_1 é uma constante. (iii) Prove que a ação é invariante sob a transformação $x' = x + a$, $t' = e^{\beta a}t$ para um certo valor de β (determine-o). Interprete geometricamente o significado desta transformação. (iv) Considerando a versão infinitesimal da transformação do item anterior, use o teorema de Noether para demonstrar que $(\gamma t\dot{x} - 1)\dot{x}e^{2\gamma x} = C_2 =$ constante . (v) Combinando as duas constantes de movimento para eliminar $\dot{x}$, prove que

$$x(t) = A + \frac{1}{\gamma}\ln(B + \gamma t)$$

e verifique diretamente que esta é a solução da eq. de movimento da partícula.